静岡県立大学
短期大学部
研究紀要第9号
1995年度

p- 進整数環上の連続関数

舘 山 光 一

0. 序

pを素数とし，$\mathbf{Z}_p$，$\mathbf{Q}_p$をそれぞれp進整数環，p進体とする。$\mathbf{Z}_p$は位相環となるので$\mathbf{Z}_p$から$\mathbf{Z}_p$への連続関数を考えることができる。代表的な関数としては$\mathbf{Q}_p$係数の多項式で，$\mathbf{Z}_p$の元を代入したときその値も$\mathbf{Z}_p$となるものがある。以下，記号を簡単にするために$f(T)$を多項式とするとき，$f(\alpha)$をそれに対応する$\mathbf{Z}_p$上の関数とし，多項式関数と呼ぶことにする。
更に具体的な関数としてはnを自然数とするとき

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

という二項関数と呼ばれるものがある。$n=0$のとき$\binom{\alpha}{0}=1$と定めると，

定理（Mahler）$\phi(\alpha)$を$\mathbf{Z}_p$から$\mathbf{Q}_p$への連続関数とすると，

$$\phi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{\alpha}{n}$$

を満たす0に収束する$\mathbf{Q}_p$の数列$\{a_n\}$（$n=0, 1, \ldots\ldots$）が一意に存在する。

この定理は，$\mathbf{Q}_p$の有限次拡大体の整数環Rで定義された連続関数に対して自然に拡張される。この場合はRが$\mathbf{Z}_p^n$に位相同型となることから，容易に

$$\binom{\alpha_1}{k_1}\binom{\alpha_2}{k_2}\cdots\cdots\binom{\alpha_n}{k_n}$$

という関数で展開できることが上記のMahlerの定理より導かれる。ただし，位相同型はRの$\mathbf{Z}_p$-baseのとりかたに依存するので，明確にRの変数を用いて表すことはできない。α_1，α_2，$\ldots$，α_nはRから同型写像で移された$\mathbf{Z}_p^n$の変数を表す。R上の多項式関数も考えることができるのだが，位相同型を使ってしまうと$\mathbf{Z}_p$の場合のような連続関数と多項式関数との関係は不明瞭になってしまう。ここで，上の定理は連続関数に関するものと考えずに，多項式関数のつくる空間に関するものととらえ，$\mathbf{Z}_p$の場合は，その完備化が連続関数全体となると解釈すると，Mahlerの定理は次の定理Aのように2つの部分に分かれる。ここで，$P(\mathbf{Z}_p, R)$を$\mathbf{Z}_p$の元を代入したときの値がRにあるような多項式関数全体とする。

定理 A (Mahler) (1) $P(\mathbf{Z}_p, R)$ は $\left\{\binom{\alpha}{n}\right\}_{n=0,1,2,\ldots\ldots}$ を基底とする R-free module である。

(2) $\mathbf{Z}_p$で定義され，値域がRである連続関数全体に sup-norm を入れると，その中で$P(\mathbf{Z}_p, R)$ は dense である。

注意：Rの商体をKとし、多項式関数で値がKのもの全体を$P(\mathbf{Z}_p, K)$と書くと，容易に

$P(\mathbf{Z}_p, K)=P(\mathbf{Z}_p, R)\bigotimes_{\mathbf{Z}_p} K$が示されるの。これは多項式関数をすべて$P(\mathbf{Z}_p, R)$に限定して本質的な問題はないことを意味している。従って，ここでは値がすべて整数環のなかに入るものだけを扱うものとする。

この定理は，明らかに元の Mahler の定理と同値であるが，以下の議論で示されるように，(1)は一般にR上で定義された多項式関数に対しても同様の基底をつくることができる。(2)で主張している内容は，$\mathbf{Z}_p$上の連続関数は多項式関数でいくらでも近似できるということをいっているわけで，ここでは，一般の場合には触れない。

1. 多項式関数の基底

kを$\mathbf{Q}_p$の有限次拡大体，oをその整数環，πを prime ideal の uniformizing parameterとする。k係数の多項式はk上の関数と考えられるが，特にoの値を代入したときにその値もoであるような関数のつくるo-module を$P(o)$とする。ここでの目的は，$P(o)$のo-base を構成することである。以下，fを剰余体の素体上の拡大次数，$q=p^f$とする。

αを多項式関数の変数とするとき，n次の多項式関数 $\rho(n, \alpha)$を次のように定める。まず，iを正の整数とし

$$\rho(1, \alpha)=\alpha,\ \rho(q, \alpha)=\frac{\alpha^q-\alpha}{\pi},\ \ \rho(q^i, \alpha)=\rho(q, \alpha)\circ\cdots\circ\rho(q, \alpha)\ (i\text{回の合成})$$

とする。また，nをq- 進展開し

$n=n_0+n_1q+n_2q^2\cdots\cdots+n_rq^r\ (0\leq n_k<q,\ \ k=0, 1, \ldots\ldots, r)$

とするとき，

$$\rho(n, \alpha)=\prod_{k=0}^{r}\left(\rho(q^k, \alpha)\right)^{n_k}$$

とする。$\rho(n, \alpha)$はn次の多項式関数であり，nをq- 進展開したときの係数の和を

$s(n)=n_0+n_1+n_2+\cdots\cdots+n_r$

とおくと，最高次の係数は

$$\rho(n, \alpha)=\pi^{-\frac{n-s(n)}{q-1}}\alpha^n+\cdots\cdots$$

となる。また，明らかに

$$\pi^{-\frac{n-s(n)}{q-1}}\ \rho(n,\ \alpha)$$

は o 係数の多項式関数である。

命題　$\{\rho(n,\ \alpha)\}(n=0,1,2,\cdots\cdots)$ は $P(o)$ の o-base である。ただし，$\rho(0,\ \alpha)=1$ とする。
証明）　α を o の元とすると，$\alpha^q\equiv\alpha \mathrm{mod}\ \pi$ より，$\rho(q,\ \alpha)$ は o-value の多項式関数であり，$\rho(n,\ \alpha)$ は全て $P(o)$ の元となる。$\phi(\alpha)$ を n 次の $P(o)$ の元とする。$\rho(n,\ \alpha)$ が n 次であることより，$\phi(\alpha)$ は k の元 $\phi_k(k=0,1,\ldots.,\ n)$ を用いて，

$$\phi(\alpha)=\phi_0\rho(0,\ \alpha)+\phi_1\rho(1,\ \alpha)+\ldots\ldots+\phi_n\rho(n,\ \alpha)$$

と表される。$\alpha_j(j=0,1,2,\ldots..,\ n)$ を o の相異なる元とする。全ての $\phi_n(k=0,1,2,\ldots,\ n)$ が o の元であることを示すには，α_jを適当にとって，$\det(\rho(i,\ \alpha_j))(ij,=0,1,2,\ldots,n)$ が unit になることを示せばよい。

ここで，簡単のために

$$t(j)=\pi^{-\frac{j-s(j)}{q-1}}\quad(j=0,1,2,\ldots..,n)$$

とおき，行の定数倍および行に行の定数倍を加えるという，行列式の基本的な変形を行うと，

$$det(\rho(i,\ \alpha_j))=\det(\alpha_j^i)\prod_{k=0}^{n}t(k)$$

となり，さらに右辺の行列式は Vandermonde の行列式であることから，

$$det(\rho(i,\ \alpha_j))=\pm\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\prod_{k=0}^{n}t(k)$$

である。

ここで，ε を 1 の原始 $q-1$ 乗根として α_k を次のように定める。k の q- 進展開を

$$k=k_0+k_1q+\ldots\ldots+k_rq^r(0\leq k<q,\ j=0,1,\ldots.r)$$

とするとき，

$$\alpha_k=\varepsilon^{k_0}+\varepsilon^{k_1}\pi+\varepsilon^{k_2}\pi^2+\ldots\ldots+\varepsilon^{k_r}\pi^r$$

従って，i，mを正の整数とすると，

$$\alpha_k\equiv\alpha_m \mod\ \pi^i\Leftrightarrow k\equiv m\mod\ q^i$$

である。

補題　k を正の整数，$k=k_0+k_1q+\ldots\ldots+k_rq^r(0\leq k_j<q,\ j=0,1,\ldots.,\ r)$ をその q- 進展開とすると，

$$ord_\pi\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha_i-\alpha_k)=\frac{k-s(k)}{q-1}$$

証明）$\alpha_k\equiv\alpha_j \mod\ \pi$ となるのは $k\equiv j \mod q$のときであるから，

$$j=k_0,\quad k_0+q,\quad k_0+2q,\quad \cdots\cdots,\quad k_0+k_1q+\cdots\cdots+(k_r-1)q^r$$

のときである。従って，

$$\frac{k-k_0}{q}=\left[\frac{k}{q}\right]$$ （ここで[ ]はGauss symbol を表す）

だけの個数の $\alpha_k-\alpha_j$ が π で割り切れる。同様に，π^i で割り切れる個数は，

$$\frac{k-(k_0+k_1q+\cdots+k_{i-1}q^{i-1})}{q^i}=\left[\frac{k}{q^i}\right]$$

となる。故に，

$$ord_\pi\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha_i-\alpha_k)=\left[\frac{k}{q^i}\right]+\left[\frac{k}{q^i}\right]+\cdots\cdots=\frac{k-s(k)}{q-1}$$

より，補題が証明された。

この補題より，命題は証明された。

系 $\phi(\alpha)$ を $P(o)$ の元とし，次数が n でその係数を ϕ_n とすると，

$$ord_\pi\,\phi_n\leq-\frac{n-s(n)}{q-1}$$

が成立する。

また，多項式関数の関数列が基底となる条件は次のように与えられる。

定理 n を負でない整数とするとき，$g_n(\alpha)$ を次数が n である $P(o)$ の元で，最高次の係数を g_n とする。このとき，$\{g_n(\alpha)\}$ が $P(o)$ の基底となる条件は

$$ord_\pi g_n=-\frac{n-s(n)}{q-1}$$

がすべての n で成立することである。

参考文献

Lang,S : Cyclotomic Fields