静岡県立大学短期大学部
研究紀要 14-3 号 (2000 年度)-1

p-進体上の線形汎関数

舘山光一

Linear Functionals over a p-adic Number Field

Koichi TATEYAMA

1 序

p を奇素数、f を $f \not\equiv 2 \bmod 4$ となる自然数、h を 0 以上の整数とする。χ を conductor f の Dirichlet character、φ を $\mathbf{Z}$ で定義された関数とするとき、

$$M_{\chi,h}(\varphi) = \frac{1}{fp^h} \sum_{a=0}^{fp^h-1} \varphi(a)\chi(a)$$

とおく。ここで、$K = \mathbf{Q}_p(\chi)$ を $\mathbf{Q}_p$ に χ の値を加えた体、R をその整数環とする。よく知られているように、$\varphi(a) = a^k (k = 1, 2, 3, \cdots)$ のときは、K 上で

$$\lim_{h \to \infty} M_{\chi,h}(\varphi) = B_{k,\chi}$$

となる (cf.[I])。ここで、$B_{k,\chi}$ は k 番目の generalized Bernoulli 数である。φ を Z_p 上の連続関数とすると、$M_{\chi,h}(\varphi)$ は一般には収束するとは限らない。これは、$M_{\chi,h}$ が bounded linear functional に拡張できないということを意味しており、通常の p-adic measure には対応しない。ここでは、上の極限値が収束する関数 φ を M_χ-integrable と呼ぶことにする。M_χ-integrable な関数 φ に対しては

$$M_\chi(\varphi) = \lim_{h \to \infty} M_{\chi,h}(\varphi)$$

と定義することにより、M_χ は M_χ-integrable な関数全体の空間から K への線形写像を与える。$\mathbf{Z}_p$ 上の連続関数全体のつくる空間 $X = C(\mathbf{Z}_p, K)$ の元 ϕ のノルムを、

$$\|\phi\| = \sup_{a \in \mathbf{Z}_p} |\phi(a)|$$

のように定めると、X は完備なノルム空間（Banach space）となり、X から K への線形写像 L に対してもノルムを次のように定義することができる。

$$\|L\| = \sup_{0 \neq f \in X} \frac{\|L(f)\|}{\|f\|}$$

ただ、すべての線形写像のノルムが有限確定値になるわけではなく、上で定義した M_χ はノルムが無限大になってしまう。有限確定値になる場合が関数解析でいう bounded linear functional になるわ

けで、この場合は次の定理がある (cf.[L2])。

定理 1.1（岩澤）$\mathbf{Z}_p$ 上の bounded linear functional のつくるノルム空間 X^* と $R[[T]] \otimes_R K$ は次の対応 ι により同型になる。

$$L(\in X^*) \longmapsto \iota(L)(T) = \sum_{n=0}^{\infty} L\left(\binom{a}{n}\right) T^n$$

ここで、$\binom{a}{n}$ は、次のように 2 項関数を表す。

$$\binom{a}{0} = 0, \quad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} \quad (n \geq 1)$$

本稿の目的は、上の写像を non-bounded functional に拡張し、M_χ に対応する power series を求め、p-adic L-function との関係を明らかにすることにある。

2 多項式関数上の linear functional

X を位相空間とするとき $C(X, R)$ を X 上の連続関数で、値域が R に含まれるもの全体とし、$P(R)$ を二項関数で生成される $C(\mathbf{Z}_p, R)$ の R-submodule とする。sup-norm によって $C(\mathbf{Z}_p, R)$ は完備なノルム空間となるが、次の定理により $P(\mathbf{Z}_p)$ は $C(\mathbf{Z}_p, R)$ 内で稠密となる ([cf.[L2])。

定理 2.1（Mahler）$\mathbf{Z}_p$ 上定義され、値域が R に含まれる連続関数 φ は、次のように一意に二項関数によって展開される。

$$\varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \binom{a}{n}$$

ここで、φ_n は φ によって定まる R の元で $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$ を満たし、$||\varphi|| = \sup_n |\varphi|$ である。

この定理を利用して、$\mathrm{Hom}_K(K[a], K)$ から $K[[T]]$ への線形写像 I を次のように定義する。

$$I(L)(T) = \sum_{n=0}^{\infty} L\left(\binom{a}{n}\right) T^n \quad (L \in \mathrm{Hom}_K(K[a], K))$$

もちろん、L が bouded linear functional ならば、この写像は ι に一致する。また、定理 1.1 により次の命題も成立する。

命題 2.2 $I(L)(T) \in R[[T]] \otimes_R K$ ならば、L は $C(\mathbf{Z}_p, K)$ 上の bounded linear functional に拡張できる。

L が bounded な場合、上の写像を考える意味は何もない。ここで問題としているのは、bounded でない場合に $C(\mathbf{Z}_p, K)$ 上の linear functional を定義し、利用できないかということである。そのために、$C(\mathbf{Z}_p, K)$ の submodule $D(\mathbf{Z}_p, K)$ を次のように定義する。

定義　$C(\mathbf{Z}_p, K)$ の元

$$\varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \left(\binom{a}{n} \right)$$

が $D(\mathbf{Z}_p, K)$ の要素となる条件は、すべての n に対し、$|\varphi_n| \leq |p|^{dn+e}$ となる正の数 d と実数 e が存在することである。

命題 2.3　r を自然数、t を $\mathbf{Z}_p$ の元とする。$\delta_{t,r}(a)$ を $t + p^r\mathbf{Z}_p$ の特性関数、すなわち

$$\delta_{t,r}(a) = \begin{cases} 0 & (a \notin t + p^r\mathbf{Z}_p) \\ 1 & (a \in t + p^r\mathbf{Z}_p) \end{cases}$$

であるとすると、$\delta_{t,r}(a)$ は $D(\mathbf{Z}_p, K)$ の元である。

証明）ζ を 1 の原始 p^r 乗根とする。

$$\delta(a) = \frac{1}{p^r} \sum_{i=0}^{p^r-1} \zeta^{i(a-t)}$$

とおくと、$\zeta^{a-t} \neq 1$ ならば、

$$\delta(a) = \frac{1}{p^r} \frac{1 - \zeta^{(a-t)p^r}}{1 - \zeta^{a-t}} = 0$$

$\zeta^{a-t} = 1$ ならば、$\delta(a) = 1$ である。よって、$\delta(a) = \delta_{t,r}(a)$ となる。

ここで、$\pi_i = \zeta^i - 1$ とおくと、

$$\zeta^{ia} = (1 + \pi_i)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_i^n \binom{a}{n}$$

より、

$$\delta_{r,t}(a) = \frac{1}{p^r} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} \sum_{i=1}^{p^r-1} \zeta^{-it} \pi_i^n$$

と表される。従って、$d(r) = \frac{1}{(p-1)p^{r-1}}$ とおくと、$|\pi_i| = |p|^{d(r)}$ より、

$$\left| \frac{1}{p^r} \sum_{i=1}^{p^r-1} \zeta^{-it} \pi_i^n \right| \leq \left| \frac{\pi_i^n}{p^r} \right| = |p|^{d(r)n-r}$$

となり、この命題は証明された。

また、$\mathbf{Z}_p^\times$ の有限位数の指標は $\delta_{t,r}$ の線形結合で表されることから、次の系が容易に証明される。

系 2.4　χ を $\mathbf{Z}_p^\times$ の有限位数の指標で、その値は K に含まれるとする。このとき、χ は $D(\mathbf{Z}_p, R)$ の元である。

命題 2.5　$\varphi \in D(\mathbf{Z}_p, R), \psi \in D(\mathbf{Z}_p, R)$ ならば、$\varphi\psi \in D(\mathbf{Z}_p, R)$ である。

証明）$|\varphi_n| \le |p|^{en+e_0}$, $|\psi_m| \le |p|^{fm+f_0}$ とする。$\binom{a}{n}$ は次数 n の多項式関数であるから、

$$\binom{a}{n}\binom{a}{m} = \sum_{k=0}^{n+m} l(n,m:k)\binom{a}{k}$$

を満たす整数 $l(n,m:k)$ が存在する。よって、

$$\varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\binom{a}{n},\ \psi(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n\binom{a}{n}$$

とおくと、

$$\varphi(a)\psi(a) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}\sum_{n+m\ge k} l(n,m:k)\varphi_n\psi_m$$

と表される。ここで、

$$|l(n,m:k)\varphi_n\psi_m| \le |p|^{en+fm+g} \le |p|^{\min(e,f)(n+m)+g} \le |p|^{\min(e,f)k+g}$$

より、命題 2.5 は証明された。

L を $K[a]$ から K への線形写像、$\varphi(a)$ を $C(\mathbf{Z}_p, K)$ の元とする。

$$\lim_{n\to\infty} L\left(\binom{a}{n}\right)\varphi_n = 0$$

のとき、$\varphi(a)$ を L-integrable とよび、

$$L(\varphi) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\varphi_k L\left(\binom{a}{k}\right)$$

と定義する。また、$D(\mathbf{Z}_p, K)$ の元すべてが L-integrable のとき、L は type-a であるとよぶことにする。もちろん、bounded linear functional は type-a である。type-a の linear functional L に関しては、次の定理が成り立つ。

定理 2.6　L を type-a の $K[a]$ から K への線形写像、$F_L(T) = I(L)(T)$ とする。このとき、等式

$$F_L(z) = L((1+z)^a)$$

が、$|z| < 1$ となるすべての R の元 z に対して成立する。

証明）関数 $(1+z)^a$ は、次のように定義される。

$$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n$$

よって、この関数は L-integrable であり、

$$L((1+z)^a) = \sum_{n=0}^{\infty} L\left(\binom{a}{n}\right) z^n = F_L(z)$$

より、定理は証明された。

注意）L が type-a の場合、$F_L(z)$ の値によって $F_L(T)$ は一意に定まる。即ち、すべての $|z|<1$ となるような z に対して $F_L(z) = G(z)$ ならば $F_L(T) = G(T)$ である。これは、係数が有界な power series ならば明らかであるが、今の場合も次のようして示すことができる。

補題 2.7 $H(T)$ を K 係数の power series 、d を正の実数とする。$|z| \le |p|^d$ となるすべての R の元 z に対して $H(z)$ が収束し 0 になるならば、$H(T) = 0$ である。
証明）$H(T)$ の T^n の係数を h_n とすると、$H(z)$ が収束することより

$$\lim_{n\to\infty} h_n z^n = 0$$

である。よって、$H(zT)$ は係数が有界な power series となる。従って、Weierstrass の準備定理 (cf.[L2]) より $H(zT) = 0$ である。

3 Unitization operator

$g(T)$ を R 係数の power series とするとき、次の R-linear homomorphism $U : R[[T]] \longrightarrow R[[T]]$ を、unitization operator と呼ぶ。

$$Ug(T) = g(T) - \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1} g(\zeta T + \zeta - 1)$$

もちろん、$R[[T]]$ 上では well-defined であるが、type-a の linear map に対応する power series に対しても同様に定義できる。

補題 3.1 ζ を 1 の原始 p 乗根、$K = \mathbf{Q}_p(\zeta)$

$$h(T) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n T^n \in K[[T]]$$

とする。このとき、

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\zeta - 1)^n = 0$$

ならば Uh は定義可能である。
証明）

$$h_n(\zeta T + \zeta - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n \zeta^k (\zeta - 1)^{n-k} T^k$$

より、$Uh(T)$ の T^k の係数は

$$h_k - \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}h_n\zeta^k(\zeta-1)^{n-k}$$

となる。よって、

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\zeta-1)^n = 0$$

ならば収束する。ゆえに証明された。

上の証明より、L が type-a の linear functional とすると、L に対応する power series$I(L)(T) = f_L(T)$ に対して $Uf_L(T)$ は定義できる。また、次の補題を示すことができる。

補題 3.2 $Uf_L(T)$ は type-a となる。

証明) $Uf_L(T)$ の n 次の係数を H_n、$D(\mathbf{Z}_p, R)$ の元を φ とし、$|\varphi_n| \le |p|^{en+f}$ であるとする。補題 3.1 の計算より、

$$H_k\varphi_k = h_k\varphi_k - \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}\sum_{n=k}^{\infty}h_n\varphi_k\binom{n}{k}\zeta^k(\zeta-1)^{n-k}$$

ここで、$d = \frac{1}{p-1}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
|\sum_{\zeta^p=1}\sum_{n=k}^{\infty}h_n\varphi_k\binom{n}{k}\zeta^k(\zeta-1)^{n-k}| &\le \sup_{n\ge k}|h_n\varphi_k(\zeta-1)^{n-k}| \\
&\le \sup|h_n||p|^{ek+f}|p|^{d(n-k)} \\
&\le \sup|h_n||p|^{\min(e,d)n+f}
\end{aligned}$$

よって、k を十分大きくすれば、この値は 0 に近づく。これで、この補題は示された。

Unitization operator は $\mathbf{Z}_p$ 上の測度の場合、$\mathbf{Z}_p^\times$ に制限した測度を構成するときにつかわれる。このことは、bounded でない linear functional についても同様にいえることである。

命題 3.3 L を type-a の linear functional、$\varphi \in D(\mathbf{Z}_p, K), \phi = \phi_{\mathbf{Z}_p^\times}$ を $\mathbf{Z}_p^\times$ の characteristic function とする。linear functional L_0 を次のように定義する。

$$L_0(\varphi) = L(\varphi\phi)$$

このとき、L_0 に対応する power series$I(L_0)(T)$ は $UI(L)(T)$ に一致する。

証明）補題 3.1 より、$UI(L)(T)$ は定義可能である。また、命題 2.2, 2,3 により $\varphi\phi$ は $D(\mathbf{Z}_p, K)$ の元である。ここで、

$$\phi(a) = 1 - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\zeta^{ka}$$

より、z を十分小さい $\mathbf{Z}_p$ の元とすると、

$$\begin{aligned} L(\phi(a)(1+z)^a) &= L\left((1+z)^a - \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}(z\zeta+\zeta)^a\right) \\ &= f_L(z) - \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1} f_L(z\zeta+\zeta-1) \end{aligned}$$

より、命題 3.3 は示された。

4 Linear functional M_χ

最初に述べた linear functional M_χ に対応する power series F_χ をここで求めておく。以後、χ の conductor f は p 冪ではないとする。

$$I(M_\chi)(T) = F_\chi(T) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n T^n$$

とおくと、

$$f_n = \lim_{h\to\infty} M_{\chi,h}\left(\binom{a}{n}\right) = \lim_{h\to\infty}\frac{1}{fp^h}\sum_{k=0}^{fp^h-1}\chi(k)\binom{k}{n}$$

である。ここで、

$$\sum_{k=0}^{fp^h-1}\chi(k)\binom{k}{n} = \sum_{j=0}^{f-1}\chi(j)\sum_{l=0}^{p^h-1}\binom{j+lf}{n}$$

であるが、これは

$$\sum_{j=0}^{f-1}\chi(j)\sum_{l=0}^{p^h-1}(1+T)^{j+lf}$$

の T^n 係数であるから、$F_\chi(T)$ は

$$\lim_{h\to\infty}\frac{(1+T)^{fp^h}-1}{fp^h}\sum_{j=0}^{f-1}\frac{\chi(j)(1+T)^j}{(1+T)^f-1}$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{p^h}\binom{fp^h}{n} = \frac{f(fp^h-1)(fp^h-2)\cdots(fp^h-n-1)}{n!}$$

より、

$$F_\chi(T) = \sum_{j=0}^{f-1}\frac{\chi(j)(1+T)^j}{(1+T)^f-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}T^n = \sum_{j=0}^{f-1}\frac{\chi(j)(1+T)^j}{(1+T)^f-1}\log(1+T)$$

となる。M_χ が type-a になることを示すには、次の補題が必要である。

補題 4.1 $f(T) \in R[[T]] \otimes K, g(T) \in K[[T]]$ とし、$g(T), f(T)g(T)$ の n 次の係数をそれぞれ g_n, h_n とする。ここで、d を正の実数とするとき、$\lim_{n\to\infty} |g_n||p|^{dn} = 0$ ならば、$\lim_{n\to\infty} |h_n||p|^{dn} = 0$ である。

証明）$f(T)$ の n 次の係数を f_n とすると、

$$|\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}|p|^{dn} \leq \max_{k\leq n}(|g_{n-k}||p|^{d(n-k)} \cdot |p|^{dk})$$

より明らか。

$\log(1+T)$ の n 次の係数は $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ であるから、$|z| < 1$ となる K の元に対しては

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n} = 0$$

となる。また、簡単な計算により

$$\sum_{k=0}^{f-1} \frac{\chi(k)(1+T)^k}{(T+1)^f - 1} = \frac{1}{f} \sum_{\zeta^f=1} \frac{\tau(\chi,\zeta)\zeta}{1+T-\zeta}$$

である。ここで、$\tau(\chi,\zeta) = \sum \chi(k)\zeta^k$ は Gauss の和を表す。よく知られているように、ζ が primitive な f-乗根でなければ $\tau(\chi,\zeta) = 0$ である (cf. [L] p.83)。従って、上の和は primitive な 1 の f-乗根のみ現れる。また、conductor f が p 冪でなければ $1-\zeta$ は K の単数である。この場合

$$\frac{1}{T+u} = \sum (-1)^n \frac{T^n}{u^{n+1}}$$

より、

$$\sum_{k=0}^{f-1} \frac{\chi(k)(1+T)^k}{(T+1)^f - 1}$$

は $R[[T]] \otimes K$ の元である。よって、次の定理が証明された。

定理 4.2 φ を $D(\mathbf{Z}_p, K)$ の元とする。このとき、

$$M_\chi(\varphi) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{fp^h} \sum_{k=0}^{fp^h-1} \chi(k)\varphi(k)$$

は収束し、M_χ は $D(\mathbf{Z}_p, K)$ 上の linear functional となる。また、対応する power series は

$$\begin{aligned} I(M_\chi)(T) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_\chi\left(\binom{a}{n}\right) T^n \\ &= \log(1+T) \sum_{k=0}^{f-1} \frac{\chi(k)(1+T)^k}{(1+T)^f - 1} \end{aligned}$$

である。

5 differential operator

p-進 L-関数と M_χ との関係を示すために、$D(\mathbf{Z}_p, K)$ 上の微分作用素について述べる。二項関数は多項式関数なので、微分は形式的に定義することができる。一般の場合は実数のときと同様に

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}$$

が存在するとき、$D\varphi, D_a\varphi(a)$ または、$\frac{d}{da}\varphi(a)$ とかくことにする。もちろん、多項式関数の場合は存在し、通常の微分と同じ式になる。特に、二項関数の場合は次の等式が成立する。

補題 5.1

$$\frac{d}{da}\binom{a}{n}=\sum_{l=1}^{n}\binom{a}{n-l}(-1)^{l-1}\frac{1}{l}$$

証明）T を不定元とし、

$$(1+T)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}T^n$$

とおく。両辺を a で微分すると、

$$(1+T)^a\log(1+T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{da}\binom{a}{n}T^n$$

よって、展開式では

$$\sum_{l=0}^{\infty}\binom{a}{l}T^l\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{da}\binom{a}{n}T^n$$

となるので、T^n の係数を比較することにより上の式を得る。

命題 5.2 $D(\mathbf{Z}_p, K)$ の元は微分が存在し、微分はまた $D(\mathbf{Z}_p, K)$ の元となる。

証明）$\varphi(a)\in D(\mathbf{Z}_p, K),\quad d>0$ とし、

$$\varphi(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\binom{a}{n},\qquad |\varphi_n|\le|p|^{dn+e}$$

とする。補題 5.1 より、

$$\frac{d}{da}\sum_{n=0}^{N}\varphi_n\binom{a}{n}$$

を展開したときの $\binom{a}{k}$ の係数は、

$$\sum_{m=1}^{N-k}\varphi_{m+k}(-1)^{m-1}\frac{1}{m}$$

となる。よって、$N\to\infty$ のとき、この和は収束し

$$|\sum_{m=1}^{N-k}\varphi_{m+k}(-1)^{m-1}\frac{1}{m}|\le|p|^{dk+e}\frac{|p|^{dm}}{|m|}\le|p|^{dk+f}$$

より、微分はまた $D(\mathbf{Z}_p, K)$ の元となる。命題 5.2 は証明された。

この命題の証明より、次の興味深い命題を証明することができる。L を type-a の linear functional、$f(T)$ を L に対応する power series 即ち、$f(T) = I(L)(T)$ 、さらに、L_D を $f(T)\log(1+T)$ に対応する linear functional とする。

命題 5.3 $\varphi \in D(\mathbf{Z}_p, K)$ とすると、

$$L(D_a\varphi(a)) = L_D(\varphi(a))$$

が成り立つ。

証明）$f(T)$ の n 次の係数を a_n、φ の展開式は命題 5.2 と同じ記号を使うものとする。命題 5.2 の証明より、

$$\begin{aligned} L(D_a\varphi(a)) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{m+k}a_k(-1)^{m-1}\frac{1}{m} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty}\varphi_N\sum_{m+k=N}a_k\frac{(-1)^{m-1}}{m} \end{aligned}$$

となる。この後半の和は、$f(T)\log(1+T)$ の N 次の係数に等しいことから、命題は示された。

注意）L と L_D に対応する（拡張された）measure をそれぞれ μ, μ_D とおくと、上の等式は

$$\int_{\mathbf{Z}_p}\frac{d}{da}\varphi(a)d\mu(a) = \int_{\mathbf{Z}_p}\varphi(a)d\mu_D(a)$$

となる。

系 5.3 $\varphi \in D(\mathbf{Z}_p, K)$ のとき、$D_a\varphi(a) = 0$ となる必要十分条件は、任意の $f(T) \in R[[T]]$ に対して、$L_D(\varphi) = 0$ となることである。ここで、L_D は $f(T)\log(1+T)$ に対応する linear functional である。

証明）命題 5.2 より、$D_a\varphi(a)$ はまた二項関数で展開できる。よって、$D_a\varphi(a) \neq 0$ ならば、0 でない係数が存在する。n 番目が 0 でないとすると、$f(T) = T^n$ とすることにより $L_D(\varphi) \neq 0$ とできる。逆は明らか。

注意）微分可能な実数の関数 $f(x)$ ならば、$Df = 0$ から $f = \mathit{const}$ が導かれるが、$\mathbf{Z}_p$ 上の関数の場合はかなり状況が異なる。$\mathbf{Z}_p$ 上の開集合は閉集合でもあるので連結成分 (connected component) となり、その集合の特性関数は連続関数となる。また、命題 2.3 と 5.2 により、特性関数は微分可能で微分した結果は当然 0 となる。従って、locally constant function はすべて微分が 0 ということになる。微分が 0 になる関数は locally constant function になるか、というのも興味深い問題であるが、まだ解答は得られていない。

6 p-adic L-function

ここでは、linear functional M_χ と p-adic L-function との関係について述べたい。χ を conductor $f(>1)$ の Dirichlet character とし、その値域は $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体 K に含まれるとする。さらに、K は 1 の p-乗根を含むものとする。M_χ に対応する power series は

$$F_l(T) = \log(1+T)\sum_{k=0}^{f-1}\frac{\chi(k)(1+T)^k}{(1+T)^f-1}$$

であるが、ここで

$$F(T) = \sum_{k=0}^{f-1}\frac{\chi(k)(1+T)^k}{(1+T)^f-1}$$

とおく。定理 4.2 の証明より、$fF(T)$ は整係数の power series であるから、$F(T)$ には通常の p-adic measure μ が対応する。また、M_χ に対応する拡張された measure を μ_l と書くことにする。φ を $D(\mathbf{Z}_p, K)$ の元とすると、命題 5.3 より、

$$\int_{\mathbf{Z}_p} D_a\varphi(a)d\mu(a) = \int_{\mathbf{Z}_p}\varphi(a)d\mu_l(a)$$

が成り立つ。よって、n を 0 以上の正の整数とすると

$$\int_{\mathbf{Z}_p} a^n d\mu(a) = \int_{\mathbf{Z}_p}\frac{a^{n+1}}{n+1}d\mu_l(a) = \frac{1}{n+1}\lim_{h\to\infty}\sum_{k=0}^{fp^h-1}k^{n+1}\chi(k) = \frac{B_{n+1,\chi}}{n+1}$$

となる。この値を特殊値とするのが p-adic L-function である。結果を述べる前に記号の説明をすると、よく知られているように、$\mathbf{Z}_p^\times$ は 1 の $p-1$ 乗根 μ_{p-1} と $1+p\mathbf{Z}_p$ の積になる。それぞれへの projection を $\omega(a), \langle a\rangle$ とかくと、

$$a = \omega(a)\langle a\rangle \qquad (a\in\mathbf{Z}_p^\times)$$

と表される。

定理 6.1

$$L_p(1-s,\chi) = -\int_{\mathbf{Z}_p^\times}\langle a\rangle^s a^{-1}d\mu(a)$$

この定理の証明のためにいくつかの補題を証明する。

まず、λ は $\mathbf{Z}_p^\times$ 上の conductor p の character を、$p\mathbf{Z}_p$ 上は 0 と定義し、$\mathbf{Z}_p$ 上の関数に拡張したものとする。X^* を $C(\mathbf{Z}_p, K)$ 上の bounded linear functional 全体のつくる空間とする。L を X^* 上の元、φ を $C(\mathbf{Z}_p, K)$ の元とするき、bounded linear functional L_λ を次のように定義する。

$$L_\lambda(\varphi) = L(\lambda\varphi)$$

$L \longrightarrow L_\lambda$ という対応により、X^* から X^* への linear map ができるが、定理 1.1 の同型写像により $R[[T]]\otimes K$ から $R[[T]]\otimes K$ への linear map が導かれる。この写像を l_λ とかくことにする。このと

き

補題 6.2 $l_\lambda(F(T)) = F_\lambda(T)$ とすると、$UF_\lambda(T) = F_\lambda(T)$ であり、かつ次の等式が成立する。

$$F_\lambda(T) = \sum_{k=0}^{fp-1} \frac{\chi(k)\lambda(k)(1+T)^k}{(1+T)^{fp}-1}$$

証明）ϕ を $\mathbf{Z}_p^\times$ の特性関数とする。λ は $p\mathbf{Z}_p$ 上 0 であるから、任意の $L \in X^*$ に対して $L(\phi\lambda) = L(\lambda)$ が成り立つ。従って、最初の主張は明らかである。

$0 \leq r \leq p-1$ となる整数 r に対して、$\delta_r(a)$ を $r + p\mathbf{Z}_p$ の特性関数とする。このとき、

$$\lambda(a) = \sum_{r=0}^{p-1} \lambda(r)\delta_r(a)$$

かつ、

$$\delta_r(a) = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} \zeta^{i(a-r)}$$

より、

$$\int_{\mathbf{Z}_p} (1+z)^a \lambda(a) d\mu(a) = \frac{1}{p}\sum_r \lambda(r) \sum_i \zeta^{-ir} F(\zeta^i + \zeta^i z - 1)$$

となる。ここでさらに、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{fp-1} \frac{\chi(k)(1+T)^k}{(1+T)^{fp}-1} &= \sum_{k=0}^{f-1}\sum_{l=0}^{p-1} \frac{\chi(k+fl)(1+T)^{k+fl}}{(1+T)^{fp}-1} \\
&= \sum_{k=0}^{f-1} \frac{\chi(k)}{(1+T)^{fp}-1} \frac{(1+T)^{fp}-1}{(1+T)^f-1} \\
&= F(T)
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\sum_r \lambda(r) \sum_i \zeta^{-ir} F(\zeta^i + \zeta^i z - 1) &= \frac{1}{p}\sum_r \lambda(r) \sum_i \zeta^{-ir} \sum_k \frac{\chi(k)\zeta^{ik}(1+T)^k}{(1+T)^{fp}-1} \\
&= \frac{1}{p}\sum_k \frac{\chi(k)(1+T)^k}{(1+T)^{fp}-1} \sum_r \lambda(r) \sum_i \zeta^{i(k-r)} \\
&= \sum_k \frac{\chi(k)\lambda(r)(1+T)^k}{(1+T)^{fp}-1}
\end{aligned}$$

である。これで補題は示された。

補題 6.3 U を unitization operator とする。このとき、

$$UF_\lambda(T) = F_\lambda(T) - \chi\lambda(p)F_\lambda((1+T)^p - 1)$$

が成り立つ。

証明）

$$\begin{aligned}\sum_{\zeta^p=1} F_\lambda(\zeta T+\zeta-1) &= \sum_{\zeta^p=1}\sum_{k=0}^{fp-1}\frac{\chi\lambda(k)\zeta^k(1+T)^k}{(1+T)^{fp}-1}\\ &= p\sum_{l=0}^{f-1}\frac{\chi\lambda(lp)(1+T)^{lp}}{(1+T)^{fp}-1}\\ &= p\chi\lambda(p)F_\lambda((1+T)^p-1)\end{aligned}$$

より、示された。

定理 6.1 の証明）n を正の整数とすると、

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{Z}_p^\times}\langle a\rangle^n d\mu(a) &= \int_{\mathbf{Z}_p^\times} a^{n-1}\omega^{-n}d\mu(a)\\ &= \int_{\mathbf{Z}_p^\times} a^{n-1}d\nu(a)\end{aligned}$$

ここで、$d\nu$ は

$$F_\nu(T)=\sum_{k=0}^{fp-1}\frac{\chi(k)\omega^{-n}(k)(1+T)^k}{(1+T)^{fp}-1}$$

に対応する測度である。$UF_\nu(T)$ に対応する測度を $d\nu_U$ とすると、

$$\int_{\mathbf{Z}_p^\times} a^{n-1}d\nu(a)=\int_{\mathbf{Z}_p} a^{n-1}d\nu_U(a)$$

となる。補題 6.3 より、次の等式が成立する。

$$\int_{\mathbf{Z}_p} a^{n-1}d\nu_U(a)=(1-\chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})\int_{\mathbf{Z}_p} a^{n-1}d\nu(a)$$

よって、

$$\begin{aligned}(1-\chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})\int_{\mathbf{Z}_p} a^{n-1}d\nu_U(a) &= (1-\chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})\lim_{h\to\infty}\frac{1}{fp^h}\sum_{k=0}^{fp^h-1}\chi\omega^{-n}(k)\frac{k^n}{n}\\ &= (1-\chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})\frac{B_{n,\chi\omega^{-n}}}{n}\end{aligned}$$

より、証明された。

以上により、M_χ, h から linear functional を定義し、p-adic measure と冪級数環の対応を与える同系写像の拡張を使って、拡張された p-adic measure を導き、最終的には p-adic L-function との関係を示したことになる。この方法は、Bernoulli number の生成関数を用いた方法、すなわち p-adic measure を利用した一般的な方法（例えば、Lang [I]）と本質的にそれほど変わることはない。しかし、生成関数を使った方法は致命的な欠陥も備えている。それは、p-adic L-function を拡張しようとした場合、生成関数がわかっている場合はほとんどない、ということである。別の言い方をすれば、

生成関数のわかっている場合にだけ、p-adic L-function の拡張は成功したといってよい。ここで示したことは、$\mathbf{Q}_p$ 上の p-adic L-function は、生成関数を使わなくとも、最初に述べた linear functional からでも導くことができるということである。ただ、残念ながら χ の conductor f が p 冪の場合は扱うことができなかった。これは、$1/T$ に対応する 拡張された p-adic measure を定義しなければならないという事情からで、いまのところそれはできていない。

References

[I] K.Iwasawa, *Lecture on p-adic L-Functions*, Annals of Math. Studies 74, Princeton Univ. Press,1972

[L] S.Lang, *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley:Reading,MA,1970

[L2] S.Lang, *Cyclotomic Fields*,Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag:New York,1980