静岡県立大学短期大学部
研究紀要１１－３号（１９９７年度）－４

ある関数の特殊値と Bernoulli 数について

舘山光一

Special values of a certain analytic function and Bernoulli numbers

TATEYAMA　Koichi

１．序

$\mathbf{Q}$，$\mathbf{C}$，$\mathbf{H}$ をそれぞれ有理数体、複素数体、$\mathbf{C}$ の上半平面，すなわち $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$とする。また p を素数とするとき、$\mathbf{Q}_p$ を p-進体とする。ここで、t を変数とする関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \frac{te^t}{e^t - 1}$$

とおくと、次のように Taylor 展開できる。

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

ここで、B_k は Bernoulli 数とよばれ有理数であり、$f(-t) = f(t) - t$　より

$$B_1 = \frac{1}{2},\quad B_{2l+1} = 0\ (l > 0)$$

となることが知られている ([I])。Bernoulli 数は、数論においてきわめて興味深い対象であるが、その理由の一つとして Riemann の zeta 関数　$\zeta(s)$ の特殊値に現れることがあげられる。π を円周率、i を虚数単位、k を正の偶数とすると

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2k!} B_k$$

さらに、$\mathbf{Q}_p$ 上で次の等式もよく知られている ([I])。

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{p^h} \sum_{n=1}^{p^h} n^k = B_k$$

この２つの等式を組み合わせると、次の等式を導くことができる。

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{p^h} \sum_{n=1}^{p^h} n^k = -\{1-(-1)^{k-1}\} \frac{k!}{(2\pi i)^k} \zeta(k)$$

ここで k は 1 以上の整数を表す。

本稿の目的は、この関係式を一般化することにある。そのために、記号の準備をしなければ

ならない。まず、i を虚数単位、ω を 1 の 3 乗根とし、ともに $\mathbf{H}$ の元、すなわち虚数部分が正のものとする。また、$\mathbf{Q}(i, \omega)$ から $\mathbf{Q}_p$ の代数閉体への埋め込みを一つ定めるものとする。

ここで主定理を述べるために、次のような $\mathbf{C}\times\mathbf{H}$ 上の関数 $E(s, z)$ を定義する。

$$E(s, z) = \frac{1}{2}\zeta(s) + \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-s}(n)q^n$$

ここで、 $q = e^{2\pi iz}$, $\sigma_{-s}(n)$ は

$$\sigma_{-s}(n) = \sum_{0<d|n} d^{-s}$$

である。

定理１　k を正の偶数とする。複素数 z を i または ω とすると

$$\frac{1-z^k}{(2\pi i)^{k+1}}E(k+1, z) \in \mathbf{Q}(z)$$

かつ、$\mathbf{Q}_p(z)$ において次の等式

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{p^{2h}}\sum_{n,m=1}^{p^h}(n+mz)^{k+2} = z(1-z^k)\frac{2(k+1)!}{(2\pi i)^{k+1}}E(k+1, z)$$

が成立する。

２．Dirichlet 級数 $L_{-k}(s)$

$k = 2l$ を正の偶数とするとき、関数

$$E(k+1, z) = \frac{1}{2}\zeta(k+1) + \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-k-1}(n)q^n$$

の Fourier 係数を用いて Dirichlet 級数 $L_{-k}(s)$ を次のように定義する。

$$L_{-k}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-k-1}(n)n^{-s}$$

簡単な計算により、$L_{-k}(s)$ は 2 つの Riemann zeta-function の積で表される。

$$L_{-k}(s) = \zeta(s)\,\zeta(s+k+1)$$

さらにガンマー関数 $\Gamma(s)$ を用いて

$$\Lambda_{-k}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\,L_{-k}(s), \quad \Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

とおくと、次の命題１で述べるように $\Lambda_{-k}(s)$ は関数等式をもち全平面に解析接続される。また、この関数等式より $E(k+1, z)$ の変換式を導くことができる。これは、$\Lambda_{-k}(s)$ の積分表示から留数を計算することにより導くことができるのが、Hecke-Weil の modular form と Dirichlet 級数の対応と同様の方法で導くほうがより見通しがよいと思われる。以下、”Weil : Sur une formule classique, J.Math.Soc.Japan,20(1968),pp.400-402” に従って、命題１、命題２の証明をする。（cf. 土井公二、三宅敏恒：保型形式と整数論、紀伊国屋書店）

命題１　$\Lambda_{-k}(s)$ は全 s 平面に解析接続され、関数等式

$$\Lambda_{-k}(-k-s) = (-1)^l \Lambda_{-k}(s)$$

を満たす。更に

$$\Lambda_{-k}(s) - \left\{ -\frac{1}{2s}\zeta(k+1) + \frac{(-1)^l}{2(s+k)}\zeta(k+1) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{l+1}\frac{(-1)^{j+1}}{s+2j+1}\zeta(2j)\zeta(2l-2j+2) \right\}$$

は任意の帯領域で有界な正則関数である。

証明）Γ 関数の次の性質はよく知られている。

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2s)$$

これを用いると、次の等式を導くことができる。

(1)
$$\Lambda_{-k}(s) = \frac{(2\pi)^l}{2}\Lambda(s)\Lambda(s+2j+1)\prod_{j=0}^{l-1}(s+2j+1)^{-1}$$

証明の前半は、$\Lambda(s)$ が全平面に解析接続され、関数等式 $\Lambda(1-s) = \Lambda(s)$ をもつことから導かれる。また、

$$\Lambda(s) + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$$

が任意の垂直な帯領域で有界な正則関数であることから、$\Lambda_{-k}(s)$ の pole を $s = a_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, それぞれの留数を A_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ とすると、

$$\Lambda_{-k}(s) - \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{s-a_j}$$

が任意の垂直な帯領域で有界な正則関数となる。$\Lambda_{-k}(s)$ の pole は (1) より $s = 0, -2l, -2j+1$ $(j = 0, 1, \ldots, l+1)$ となり、それぞれの留数は

$$\operatorname*{Res}_{s=-2j+1}\Lambda_{-k}(s) = \frac{(-1)^{j+1}}{\pi}\zeta(2j)\zeta(2l-2j+2) \quad (j = 0, 1, \cdots\cdots, l+1)$$

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\Lambda_{-k}(s) = -\frac{1}{\pi}\zeta(2l+1)$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-2l}\Lambda_{-k}(s) = \frac{(-1)^l}{\pi}\zeta(2l+1)$$

より、命題の後半が証明された。

次の命題は、$E(k+1, z)$ の変換式を与えるものである。

命題２　$k = 2l$ を正の偶数とすると、$E(k+1, z)$ は次のような変換式をもつ。

$$E\left(2l+1, -\frac{1}{z}\right) = z^{-2l}E(2l+1, z) - \frac{1}{\pi i}\sum_{j=0}^{l+1}\zeta(2j)\zeta(2l-2j+2)z^{-2j+1}$$

証明）Mellin の逆変換を用いると、$\sigma > 0$ において

$$e^{-t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma} \Gamma(s)\, t^{-s} ds$$

より、

$$E(2l+1, iy) - \frac{1}{2}\zeta(2l+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{-2l-1}(n) e^{-2n\pi y}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{-2l-1}(n)\, \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma} \Gamma(s)(2n\pi y)^{-s} ds$$

となる。ここで、$\sigma > 2$ とすると

$$L_{-2l}(s) = \zeta(s)\zeta(s+2l+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{-2l-1}(n) n^{-s}$$

は $\mathrm{Re}(s) = \sigma$ 上で一様収束し、有界となる。従って、Γ 関数に関する Stiring の評価式

$$|\Gamma(s)| \sim \sqrt{2\pi}\ |t|^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi|t|}{2}} \qquad (s = \sigma + it, \quad |t| \to \infty)$$

より、$\Lambda_{-2l}(s)$ は絶対積分可能となり、和と積分の順序の交換ができ

$$E(2l+1, , iy) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma} y^{-s}\Lambda_{-2l}(s) ds + \frac{1}{2}\zeta(2l+1)$$

となる。また、Stirling の評価式より任意の $\mu > 0$ に対して $\mathrm{Re}(s) = 3$ ($\sigma = 3$ とする)上で

$$|\Lambda_{-2l}(s)| = \mathrm{O}(\mathrm{Im}(s)^{-\mu}) \qquad (|\mathrm{Im}(s)| \to ・)$$

である。ここで関数等式を用いると、$\mathrm{Re}(s) = -2l - 3$ 上でも同様で、命題２より $-2l - 3 \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq 3$ で一様に

$$|\Lambda_{-2l}(s)| = \mathrm{O}(\mathrm{Im}(s)^{-\mu}) \qquad (|\mathrm{Im}(s)| \to ・)$$

が成立する。

$y_{-s}\Lambda_{-2l}(s)$ は $-2l - 3 \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq 3$ の範囲で simple pole $s = 0, -2l, -2j + 1$(j = 0, 1, ..., $l + 1$) をもつので、積分路を $\mathrm{Re}(s) = 3$ から $\mathrm{Re}(s) = -2l - 3 = \beta$ に変更すると、留数定理より

$$E(2l+1, iy) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=3} y^{-s}\Lambda_{-2l}(s) ds + \frac{(-1)^l}{2}\zeta(2l+1)$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{l+1} (-1)^{j-1}\zeta(2j)\zeta(2l-2j+2) y^{2j-1}$$

また、関数等式により

$$\int_{\mathrm{Re}(s)=\beta} y^{-s}\Lambda_{-2l}(s) ds = \int_{\mathrm{Re}(s)=\beta} y^{-s}(-1)^l\Lambda_{-2l}(-2l-s) ds$$
$$= \int_{\mathrm{Re}(s)=-2l-\beta} y^{s+2l}(-1)^l\Lambda_{-2l}(s) ds$$
$$= (iy)^{2l}\int_{\mathrm{Re}(s)=3} y^{s}\Lambda_{-2l}(s) ds$$

従って、次の等式が成り立つ。

$$E(2l+1, iy) = (iy)^{2l} E\left(2l+1, -\frac{1}{iy}\right) + \frac{1}{\pi i}\sum_{j=0}^{l+1} (iy)^{2j-1}\zeta(2j)\zeta(2l-2j+2)$$

ここで、 $z=-\dfrac{1}{iy}$ とおくと、

$$E\left(2l+1,-\frac{1}{z}\right)=z^{-2l}E(2l+1,z)-\frac{1}{\pi i}\sum_{j=0}^{l+1}z^{-2j+1}\zeta(2j)\zeta(2l-2j+2)$$

となることから、この等式は上半平面 $\mathbf{H}$ の虚軸上で成立する。また、両辺は $\mathbf{H}$ 上で正則な関数であるから $\mathbf{H}$ 上で成立する等式である。

ζ 関数の値を Bernoulli 数で表すと、次のようになる。

系. z を上半平面の元とすると、

$$E\left(2l+1,-\frac{1}{z}\right)=z^{-2l}E(2l+1,z)-\frac{(2\pi i)^{2l+1}}{2(2l+1)!}\sum_{j=0}^{l+1}z^{-2j+1}\binom{2l+2}{2j}B_{2j}B_{2l-2j+2}$$

３．$E(2l+1,z)$ の特殊値

２．の定理の系より、

$$\frac{z}{(2\pi i)^{2l+1}}\left(E(2l+1,z)-z^{2l}E\left(2l+1,-\frac{1}{z}\right)\right)\in\mathbf{Q}[z]$$

となり、z が有理数体上代数的ならばこの関数の値も代数的になる。

ここで、T を不定元とすると

$$\frac{1}{p^{2h}}\sum_{n,m=1}^{p^h}(n+mT)^{k+2}=\sum_{j=0}^{k+2}\binom{k+2}{j}\sum_{m=1}^{p^h}\frac{n^j}{p^h}\sum_{n=1}^{p^h}\frac{m^{k+2-j}}{p^h}T^{k+2-j}$$

また、i が 1 より大きい奇数のとき $B_i=0$ より $\mathbf{Q}_p$ 上で

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{p^{2h}}\sum_{n,m=1}^{p^h}(n+mT)^{k+2}=\sum_{j=0}^{l+1}\binom{2l+2}{2j}B_{2j}B_{2l-2j+2}T^{2l-2j+2}$$

となる。よって、z が $\mathbf{Q}_p$ 上代数的で $\mathbf{H}$ の元であるとすると

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{p^{2h}}\sum_{n,m=1}^{p^h}(n+mz)^{k+2}=2z\frac{(k+1)!}{(2\pi i)^{k+1}}\left(E(k+1,z)-z^kE\left(k+1,-\frac{1}{z}\right)\right)$$

となる。ここで、i を 1 の４乗根、ω を 1 の 3 乗根でともに $\mathbf{H}$ の元とする。このとき、

$$E\left(k+1,-\frac{1}{i}\right)=E(k+1,i)\quad,E\left(k+1,-\frac{1}{\omega}\right)=E(k+1,\omega)$$

より、次の定理を得る。

定理２　k を任意の正の整数とすると、

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{p^{2h}}\sum_{n,m=1}^{\infty}(n+mz)^{k+2}=z(1-z^k)\{1-(-1)^{k-1}\}\frac{(k+1)!}{(2\pi i)^{k+1}}E(k+1,z)$$

が成立する。

注意：l を 2 以上の自然数とすると、$E(-2l+1, z)$ は weight が $2l$ の Eisenstein 級数となることから、$E(2l+1, z)$ との関係を期待したいところだが、$E(s, z)$ の関数等式は知られていないようである。このあたりが、Riemann zeta との大きな違いのように思われる。

References

[I] Iwasawa, K. Lectures on p-Adic L-functions, Annals of Math. Studies no.74(1972)